Fale, fale, fale

Robert von Oliva

naruciakk

2020-06-09

Zaraz, przecież to elektrodynamika? – I

No ale przecież istnieją fale elektromagnetyczne!
Możemy wyprowadzić równanie falowe z równań Maxwella.
Dla przypadku w próżni możemy stwierdzić, że:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Prawo indukcji Faradaya i prawo Ampére'a poprawione

Zaraz, przecież to elektrodynamika? – II

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Następnie używamy tożsamości wektorowej i...

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{W}) - \nabla^2 \vec{W}$$

Zaraz, przecież to elektrodynamika? – III

...ta-da, mamy równania falowe dla fali elektromagnetycznej

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \cdot \nabla^2 \vec{E} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \cdot \nabla^2 \vec{B} \qquad (c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s})$$

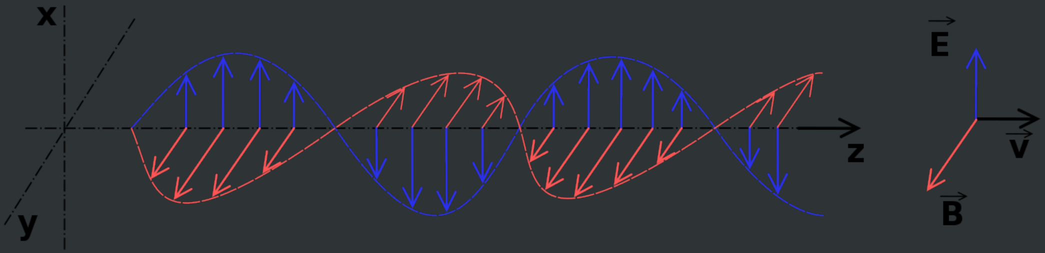
Weźmy najprostszą falę elektromagnetyczną, monochromatyczną i płaską:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

No dobrze, ale co z tego wynika? – I

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta)\hat{x} \qquad \vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t + \delta)\hat{y}$$

Fala elektromagnetyczna jest prostopadła do kierunku ruchu.



Rysunek: SuperManu, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

No dobrze, ale co z tego wynika? – II

Opiszmy wpierw jak wygląda fala, która porusza się w dowolnym kierunku $\vec{k}$:

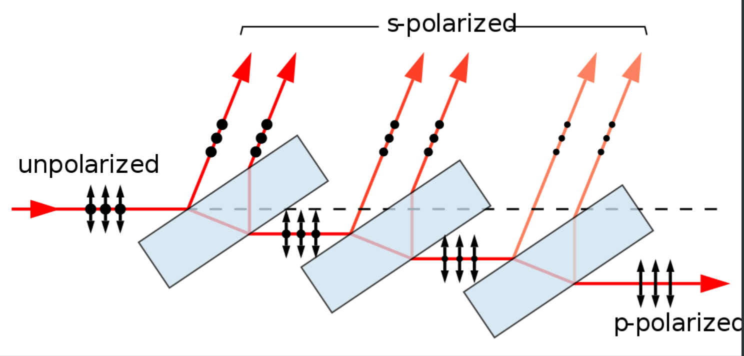
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{n}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}(\hat{k}\times\hat{n}) = \frac{1}{c}(\hat{k}\times\vec{E})$$

$\hat{n}$ – wektor polaryzacji, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ – wektor falowy propagacji

No dobrze, ale co z tego wynika? – III – Polaryzacja

Polaryzacja — relacja między kierunkiem oscylacji zaburzenia, a kierunkiem rozchodzenia się fali. Powstaje np. w polaryzatorach, działających na zasadzie odbicia.



Rysunek: DrBob Bob Mellish, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Jak to działa? – I

Mamy dwa ośrodki (np. powietrze i szkło) n_1 i n_2,
promień świetlny dociera do granicy ośrodków.
Każdy promień (fala elektromagnetyczna) występujący w zjawisku – padający, odbity i załamany – jest postaci:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B}_i = \frac{1}{n_i \cdot c} (\hat{k}_i \times \vec{E}_i)$$

Częstotliwość wszystkich fal pozostaje **taka sama** niezależnie od momentu czy ośrodka.

Jak to działa? – II

Zauważmy, że te trzy fale spełniają prosty warunek:

$$Pe^{i(\vec{k_P}\cdot\vec{r}-\omega t)} + Oe^{i(\vec{k_O}\cdot\vec{r}-\omega t)} = Ze^{i(\vec{k_Z}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

P, O i Z nie zależą w żaden sposób od momentu w którym fala się znajduje, możemy więc stwierdzić, że wykładniki poszczególnych członków muszą być takie same.
W punkcie styku trzech promieni mamy więc:

$$\vec{k_P}\cdot\vec{r}-\omega t = \vec{k_O}\cdot\vec{r}-\omega t = \vec{k_Z}\cdot\vec{r}-\omega t$$

Jak to działa? – III

To jest zaś spełnione tylko wtedy, gdy składowe wektorów są sobie równe w tym punkcie. Jak położymy jeden z wektorów na dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez osie to z równości trzecia składowa we wszystkich trzech wektorach bedzie wynosić zero.
Wszystkie trzy wektory leżą więc w jednej płaszczyźnie.
Z równości składowych wektorów wynika również prawo odbicia:

$$k_P \cdot \sin \varphi_P = k_O \cdot \sin \varphi_O \to \varphi_P = \varphi_O$$

Jak to działa? – IV – kąt Brewstera

Dla kąta padania tzw. Brewstera

$$\theta_B = arctan(\frac{n_2}{n_1})$$

mamy do czynienia z pełną polaryzacją światła odbitego.
Zjawisko to jest wykorzystywane w polaryzatorach,
ale można je także zaobserwować w „świecie realnym”.

Rysunek: Tchannon, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Dziękuję za uwagę!

Tutaj powinien się znaleźć jakiś komiks z xkcd.com, niestety wszystkie pasujące które znalazłem okazały się być zbyt skomplikowane jako punchline na koniec.

Bibliografia

1. PF Moduł 15, MIM UW, dostęp 2019-06-09
2. Brewster's Angle, Wolfram Research, dostęp 2019-06-09
3. Reflection (physics), Wikipedia, dostęp 2019-06-09